

ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Две задачи теории пластичности. Активная, пассивная и нейтральная деформации. Простое и сложное нагружения

Пластичностью называется свойство твердого тела приобретать и сохранять пластические (остаточные) деформации.

Пластическими называются деформации, сохраняющиеся после снятия нагрузки.

Если пластические деформации появляются сразу после приложения к телу внешних нагрузок, то оно называется пластическим (рис. 1). Если же тело в начале нагружения деформируется упруго и лишь с некоторой стадии нагружения в нем появляются пластические деформации, то оно называется упругопластическим (рис. 2,3).

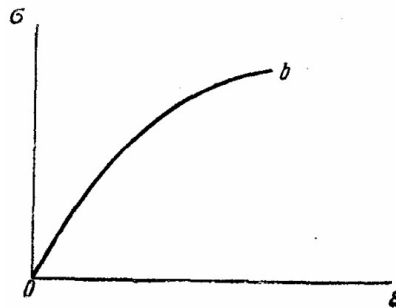


Рис. 1

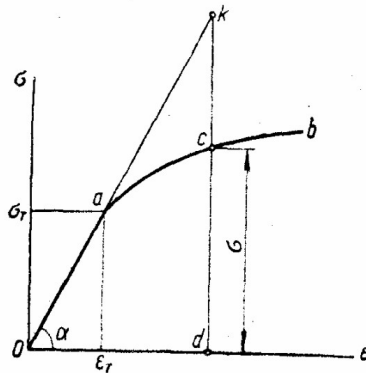


Рис. 2

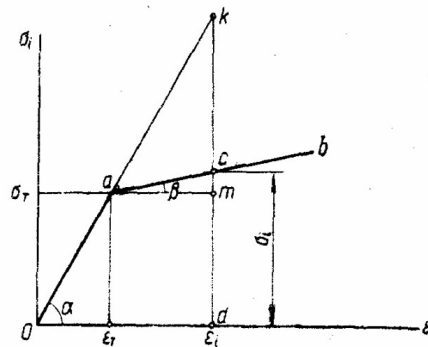


Рис. 3

В теории пластичности ставятся две различные задачи: 1) изучение всего процесса деформирования тел (конструкций); 2) определение одной лишь несущей способности (фактической разрушающей нагрузки) конструкций.

Законы пластического деформирования зависят от того, увеличивается или уменьшается нагрузка. В связи с этим различают три вида деформирования: активное, пассивное и нейтральное.

Лекция №14 (Теория упругости)

Деформирование элемента тела называется активным, если интенсивность напряжений σ_i (1) имеет значение, превышающее по модулю все предыдущие её значения; пассивным, если интенсивность напряжений меньше хотя бы одного из предыдущих значений. Нейтральное деформирование происходит при постоянном значении интенсивности напряжений σ_i

$$\sigma_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}. \quad (1)$$

Или в главных напряжениях

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}.$$

В случае активного и нейтрального деформирования за пределом упругости пластическая деформация возрастает, а в случае пассивного - остается постоянной, так как при разгрузке уменьшается лишь упругая деформация.

На законы пластического деформирования существенное влияние оказывает также характер нагружения тела.

Простым называется нагружение, при котором все внешние силы возрастают одновременно пропорционально одному общему параметру. Нагружение является сложным, если все внешние силы возрастают независимо друг от друга.

Исследованиями установлено, что влияние гидростатического давления на процесс пластического деформирования незначительно. Поэтому понятие простого нагружения может быть дано в несколько ослабленной форме. При простом нагружении компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально общему параметру.

Математический аппарат теории пластичности

Первые две группы уравнений – дифференциальные уравнения равновесия и соотношения Коши совпадают с соответствующими уравнениями теории упругости.

Физические уравнения теории пластичности зависят от того, какая теория рассматривается. В настоящее время существуют две основные теории пластичности.

К первому виду можно отнести теорию упругопластических деформаций (или деформационную теорию), в основе которой лежат уравнения, связывающие напряжения и деформации. Эта теория справедлива при малых деформациях, когда тело несжимаемо и подвергается простому нагружению. Теория этого вида получила распространение в области расчета строительных конструкций.

Ко второму виду относят теорию пластического течения, которая справедлива не только при простом нагружении, когда она совпадает с деформационной теорией, но и в определенных рамках сложного нагружения, а также при конечных деформациях. Поэтому эта теория находит применение в технологической практике (прокатка, волочение и т. д.), где исследуются большие пластические деформации.

Условия пластичности

При решении задач теории пластичности во многих случаях необходимо знать, при каких условиях материал в рассматриваемой точке переходит из упругого состояния в пластическое. Такие условия называются *условиями пластичности*.

Рассмотрим два условия пластичности, наиболее часто используемые в теории пластичности

Первое условие — условие пластичности Треска—Сен-Венана — гласит, что пластические деформации в материале возникают, когда максимальные касательные напряжения достигают значения, равного пределу текучести при чистом сдвиге:

$$\tau_{\max} = \tau_T.$$

Или

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$$

Второе условие — условие пластичности Губера-Мизеса-Генки — гласит, что пластические деформации в материале возникают, когда интенсивность касательных напряжений достигает некоторого постоянного для данного материала значения, что приводит к равенству

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} / \sqrt{2} = \sigma_T$$

или в главных напряжениях

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = \sigma_T.$$

Оба рассмотренных условия пластичности дают весьма близкие результаты. Эксперименты несколько лучше подтверждают условие Губера—Мизеса—Генки.

Отметим, что рассмотренные условия совпадают с условиями прочности по третьей и четвертой теориям прочности в сопротивлении материалов, которые используются для пластических материалов.

Теория малых упругопластических деформаций

В основе теории малых упругопластических деформаций лежат следующие законы, вытекающие из обобщения экспериментальных материалов.

Первый закон — закон изменения объема. При упругопластическом активном и пассивном деформировании объемная деформация твердого тела всегда является упругой и подчиняется закону Гука

$$\sigma_0 = K \cdot \theta,$$

где $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ - среднее нормальное напряжение, $\theta = 3 \cdot \epsilon_0 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ - объемная деформация.

Чтобы упростить решение многих задач, в теории пластичности используется допущение о несжимаемости материала. В этом случае объемную деформацию принимают равной нулю $\theta = 0$.

Отсюда следует, что для несжимаемого материала можно принимать коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$.

Имеем также

$$G = E/[2(1 + \nu)] = E/[2(1 + 0,5)] = E/3.$$

Второй закон — закон изменения формы. При активном упругопластическом деформировании в процессе простого нагружения направляющие тензоры напряжений и деформаций совпадают, т. е.

$$\bar{D}_\sigma = \bar{D}_\epsilon,$$

или, переходя к девиаторам, получим

$$D_\sigma = (2\tau_i / \gamma_i) D_\epsilon = \left(\frac{2\sigma_i}{3\epsilon_i} \right) D_\epsilon.$$

Здесь σ_i - интенсивность напряжений, ϵ_i - интенсивность деформаций

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}.$$

Эта связь между девиаторами напряжений и деформаций может быть записана через их компоненты:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= [2\sigma_i / (3\epsilon_i)] (\epsilon_x - \epsilon_0); & \tau_{xy} &= [\sigma_i / (3\epsilon_i)] \gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= [2\sigma_i / (3\epsilon_i)] (\epsilon_y - \epsilon_0); & \tau_{yz} &= [\sigma_i / (3\epsilon_i)] \gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= [2\sigma_i / (3\epsilon_i)] (\epsilon_z - \epsilon_0); & \tau_{zx} &= [\sigma_i / (3\epsilon_i)] \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Шесть формул (2) не являются полностью независимыми. Действительно, складывая первые три из них, получаем тождество $0 \equiv 0$. Следовательно, формулы (2) представляют собой систему пяти уравнений.

Третий закон — интенсивность напряжений σ_i при активном деформировании данного материала является вполне определенной функцией интенсивности деформаций ϵ_i независимо от вида напряженного состояния:

$$\sigma_i = \Phi(\epsilon_i). \quad (3)$$

Обработка многочисленных экспериментов, проведенных в условиях простого нагружения, показывает, что диаграмма $\sigma_i - \epsilon_i$ при любом напряженном состоянии подобна диаграмме $\sigma - \epsilon$ при растяжении. Следовательно, между интенсивностями напряжений σ_i и деформаций ϵ_i существует зависимость, подобная зависимости между напряжением σ и деформацией ϵ при простом растяжении:

$$\sigma = \Phi(\epsilon). \quad (3')$$

Поэтому зависимость (3) при исследовании любого напряженного состояния — линейного, плоского или объемного — можно устанавливать из опытов на простое растяжение.

Анализ большого числа экспериментов, а также решение многих частных задач теории пластичности позволили А. А. Ильюшину высказать следующий постулат: *теория малых упругопластических деформаций дает правильные (согласующиеся с опытом) результаты, по крайней мере в том случае, когда процесс нагружения тела является простым.*

Вопрос о том, как в процессе нагружения должны возрастать внешние силы, чтобы при любом неоднородном напряженном состоянии направляющий тензор оставался постоянным, в общем виде не решен. А. А. Ильюшиным дано только частное решение этой задачи, называемой теоремой о простом нагружении. Им доказано: *для того чтобы направляющий тензор напряжений во всех точках тела оставался постоянным в процессе простого нагружения, достаточно, чтобы зависимость (3) была степенной функцией вида*

$$\sigma_i = A \epsilon_i^m \quad (4)$$

и материал был несжимаемым. В (4) A и m — произвольные постоянные.

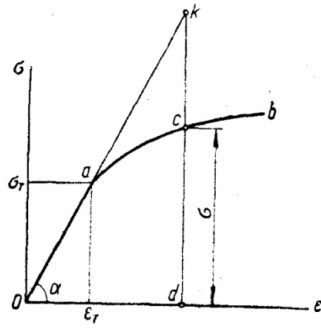
Теорема о разгрузке

Согласно А.А. Ильюшину устанавливается следующий порядок определения напряжений, деформаций и перемещений при разгрузке.

1. По уравнениям теории пластичности определяют напряжения, деформации и перемещения, которые возникают при наибольшей нагрузке, действующей до начала разгрузки.

2. По уравнениям теории упругости определяют напряжения, деформации, которые вызывает нагрузка, равная разгрузкой, имевшей место до разгрузки, и после разгрузки.

3. И находят напряжения, деформации и перемещения, найденных при итают напряжения, деформации и перемещению нагрузки, на которое произошла напряжения, деформации и перемещения в рас- грузки.



Варианты зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций

Вид функциональной зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций (3) определяется характером диаграммы испытания материала чаще всего при простом растяжении. Рассмотрим диаграмму (см. рис. 2), состоящую из двух участков: прямолинейного Oa и криволинейного ab (упругопластический материал со степенным законом упрочнения). Напряжение в произвольной точке c криволинейного участка диаграммы изображается отрезком cd . Из чертежа следует, что напряжение в произвольной точке

$$\sigma = cd = kd - kc.$$

Как известно, тангенс угла наклона к оси абсцисс прямолинейного участка диаграммы $\sigma - \epsilon$ равен модулю упругости E . Согласно чертежу, $kd = E\epsilon$ и тогда

$$\sigma = E\epsilon - kc.$$

Вынося за скобки упругую часть деформации, получаем

$$\sigma = E\epsilon [1 - kc/(E\epsilon)]. \quad (a)$$

Введем обозначение

$$\omega(\epsilon) = kc/(E\epsilon), \quad (b)$$

где $\omega(\epsilon)$ — функция понижения напряжений, зависящая от деформации ϵ . Внося эту функцию в формулу (a), получаем зависимость (3') в такой форме:

$$\sigma = E\epsilon [1 - \omega(\epsilon)].$$

На основании третьего закона теории малых упругопластических деформаций зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций должна иметь такой же вид:

$$\sigma_i = E\epsilon_i [1 - \omega(\epsilon_i)]. \quad (5)$$

Вид функции понижения $\omega(\epsilon_i)$ зависит от характера диаграммы.

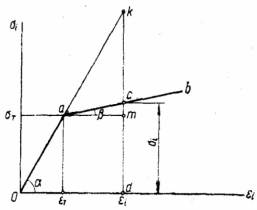


Рис. 3

1 №14 (Теория упругости)

ия упругопластического материала с линейным упрочнением (рис. 3) получим

$$\omega(\epsilon_i) = kc/(E\epsilon_i), \quad (B)$$

где

$$kc = kd - md - cm = E\epsilon_i - E\epsilon_T - E'(\epsilon_i - \epsilon_T) = (E - E')(\epsilon_i - \epsilon_T), \text{ где } E' = \tan \beta.$$

Подставляя kc в формулу (B), находим

$$\omega(\epsilon_i) = [(E - E')/E] [(\epsilon_i - \epsilon_T)/\epsilon_i] = \lambda (1 - \epsilon_T/\epsilon_i),$$

где $\lambda = (E - E')/E$ — относительное понижение модуля продольной упругости при переходе в пластическую область деформирования.

Окончательно функция понижения $\omega(\epsilon_i)$, отвечающая диаграмме на рис. 3, принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 0 & \text{при } \epsilon_i \leq \epsilon_T; \\ \omega &= \lambda (1 - \epsilon_T/\epsilon_i) & \text{при } \epsilon_i \geq \epsilon_T. \end{aligned} \right\}$$

Для материала, диаграмма которого не имеет прямолинейных участков, зависимость (3) можно представить в виде степенного закона

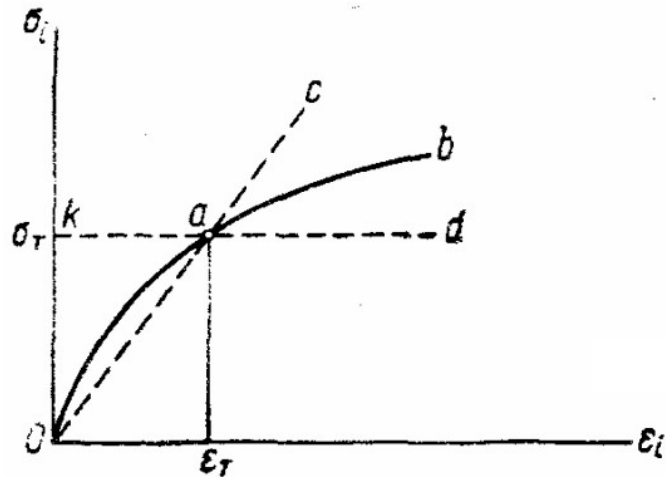


Рис. 4

$$\sigma_i = \sigma_T (\epsilon_i/\epsilon_T)^m,$$

где показатель степени $0 \leq m \leq 1$.

Если $m = 1$, получаем закон деформирования идеально упругого материала

$$\sigma_i = (\sigma_T/\epsilon_T) \epsilon_i = E\epsilon_i.$$

При $m = 0$ получаем закон деформирования идеально пластического материала, не обладающего упрочнением:

$$\sigma_i = \sigma_T.$$

Для идеального упругопластического материала, следующего диаграмме Прандтля (рис. 5), зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций принимает такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= E\epsilon_i & \text{при } \epsilon_i \leq \epsilon_T; \\ \sigma_i &= \sigma_T & \text{при } \epsilon_i \geq \epsilon_T. \end{aligned} \right\}$$

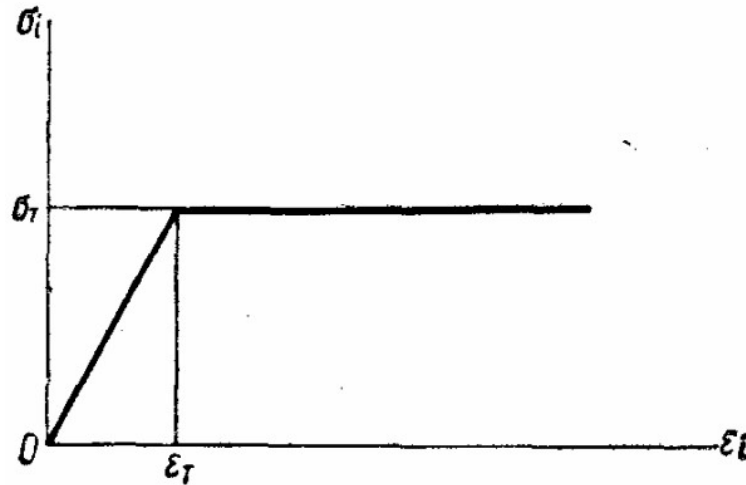


Рис. 5

При больших пластических деформациях (в 20 раз и более превышающих упругие) величиной упругой деформации можно пренебречь

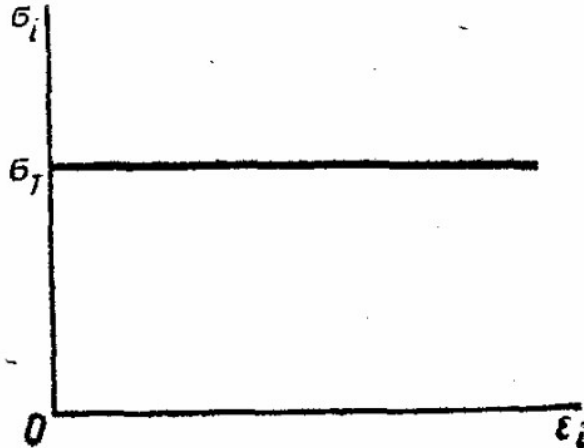


Рис. 6

и справедлива диаграмма, приведенная на рис. 6. Ее называют диаграммой деформирования идеального жесткопластического материала. Она подчиняется зависимости

$$\sigma_i = \sigma_T.$$

Понятие о теории пластического течения

Рассмотрим основные положения теории пластического течения. По смыслу названия она рассматривает пластическую деформацию твердого тела как состояние движения. Уравнения теории пластического течения могут быть написаны аналогично уравнениям теории малых упругопластических деформаций. Теория включает в себя три гипотезы.

1. Материал в пластическом состоянии несжимаем, т. е. $\varepsilon_0 = 0$.
2. Компоненты девиатора приращений пластических деформаций прямо пропорциональны компонентам девиатора напряжений. Эта гипотеза приводит к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3d\varepsilon_i} d\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3d\varepsilon_i} d\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3d\varepsilon_i} d\varepsilon_y; & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3d\varepsilon_i} d\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3d\varepsilon_i} d\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= \frac{\sigma_i}{3d\varepsilon_i} d\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\}$$

3. Интенсивность напряжений является определенной функцией интеграла интенсивности приращений пластических деформаций, не зависящей от вида напряженного состояния, т. е.

$$\sigma_i = \Phi \left(\int d\varepsilon_i \right).$$

Как уже было указано, теория пластического течения находит основное применение в технологической практике. Однако в последнее время появились работы, в которых эта теория применяется к расчету строительных конструкций, работающих в условиях сложного нагружения или испытывающих большие деформации.

Постановка задачи теории пластичности

Задача теории пластичности ставится аналогично задаче теории упругости. Известны действующие на тело поверхностные X_v, Y_v, Z_v (включая реакции) и объемные X, Y, Z силы, а также упругопластические свойства тела, определяющие диаграмму $\sigma_i - \varepsilon_i$. Требуется найти возникающие при этом напряжения, деформации и перемещения. Таким образом, имеется 17 неизвестных функций трех координат x, y и z : шесть составляющих напряжений — $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ и τ_{zx} ; шесть составляющих деформации — $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ и γ_{zx} ; три составляющие перемещения — u, v и w ; интенсивность напряжений σ_i и интенсивность деформаций ε_i .

Для отыскания этих функций теория пластичности располагает следующей совокупностью уравнений:

три дифференциальных уравнения равновесия ;

шесть физических уравнений , устанавливающих связь между напряжениями и деформациями, причем только пять из этих уравнений являются независимыми; в качестве шестого физического уравнения следует воспользоваться законом изменения объема ;

шесть геометрических соотношений Коши ;

зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций ;

выражение интенсивности деформаций .

Итого 17 уравнений с 17 неизвестными. Кроме того, необходимо также удовлетворить условиям на поверхности . Таким образом, математически задача при активной деформации и простом нагружении имеет решение. Однако практически получить его трудно, так как уравнения записываются в частных производных, и притом нелинейны.